TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 297, Number 2, October 1986

HOMOLOGIE DE L'ESPACE DES SECTIONS D'UN FIBRE

CLAUDE LEGRAND

ABSTRACT. For a fiber bundle with a finite cohomology dimension and 1-connected base B and 1-connected fiber F, we obtain the homology of the section space by an E^1-spectral sequence. In the "stable" range the E^1-terms are the homology of a product of Eilenberg-Mac Lane space of type $K(H^{p-i}(B;\ \pi_p F),\ i)$ (the same as those of the E^1-spectral sequences which converges to the homology of the functional space $\mathrm{Hom}(B, F)$ [**10**]). The differential is the product of two operations: one appears in the E^1-spectral sequence, which converges to the homology of $\mathrm{Hom}(B, F)$; the second one is a "cup-product" determined by the fiber structure of the bundle. This spectral sequence is obtained by a Moore-Postnikov tower of the fiber, which generalizes Kahn's methods [**9**].

Moore [**13**, p. 201] a posé le problème suivant:

Si B est un espace compact, existe-t-il une suite spectrale qui relie la cohomologie de B et l'homologie de l'espace fonctionnel des applications continues de B dans un espace $(n-1)$-connexe?

Pour un fibré $F \to E \to B$, de base B, de fibre F et d'espace total E, vérifiant les conditions:

($\mathscr{C}$)
- c'est un fibré de Serre, de base connexe par arcs, 1-connexe, localement compacte, de dimension cohomologique finie,
- sa fibre est connexe par arcs et 1-connexe,
- sa projection admet une section.

On montre que l'homologie de l'espace des sections de ce fibré est l'aboutissement d'une suite spectrale. Dans un domaine appelé "stable" les termes initiaux sont donnés par l'homologie d'un produit d' espaces d'Eilenberg-Mac Lane, où apparaît la cohomologie de la base. La différentielle est le produit de deux opérations: une opération de type cohomologique déterminée par la fibre du fibré; une opération du type cup-produit déterminée par la structure du fibré.

Généralisant la suite spectrale de Kahn [**9**], cette suite spectrale est obtenue à partir d'une décomposition de Moore-Postnikov du fibré.

Cohen et Taylor [**4**] utilisent une décomposition cellulaire de B. Ils imposent aux espaces considérés des conditions plus fortes, mais calculent alors toute l'homologie de leurs espaces fonctionnels à coefficients dans un corps.

Received by the editors March 31, 1985.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 55R10, 55R20, 55T05, 55T99, 55S45.

I. Notations. On se place dans la catégorie des espaces (pointés quand on le précisera) ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe. Pour deux tels espaces B et K, l'espace des applications continues de B dans K est noté $\mathrm{Hom}(B, K)$. Le sous-espace des applications continues pointées de (B, b_0) dans $(K, *)$ est noté $\mathrm{Hom}'(B, K)$. Les espaces fonctionnels sont munis de la topologie compacte ouverte.

L'espace B étant fixé, on note Γ le foncteur section au-dessus de B et Γ' sa restriction à la sous-catégorie des applications pointées. Pour un fibré $F \to E \xrightarrow{f} B$, on notera simplement ΓE.

Nous dirons que l'espace K est de dimension cohomologique finie l si $H^*(K; \mathbf{Z})$ est de type fini, $H^r(K; \mathbf{Z}) = 0$ si $r > l$ et $H^l(K; \mathbf{Z})$ est sans torsion.

On désignera par G un groupe abélien.

L'espace d'Eilenberg-Mac Lane associé à G et à l'entier n, obtenu par réalisation du complexe simplicial $K(G, n)$ sera également noté $K(G, n)$.

Le $n$ième groupe d'homologie réduite de l'espace X à coefficients dans G est noté $H_n(X; G)$.

II. Suite spectrale de Kahn des sections d'un fibré.

1° *Construction*. Soit un fibré $F \to E \xrightarrow{f} B$ avec B et F connexes par arcs et 1-connexe. On désigne par E^p une décomposition de Moore-Postnikov de f [**16**]. Pour $p < q \leqslant +\infty$, $F_p^q \to E^q \to E^p$ est un fibré dont la projection sera encore notée f. La fibre F_p^q est le $q$ième système de Postnikov [**16**] de la fibre F_p du fibré $F_p \to F \to F^p$, où F^p est une décomposition de Moore-Postnikov de $F \to *$. On a

$$\begin{aligned} \pi_i F_p^q &= \pi_i F \quad \text{si } p \leqslant i < q \leqslant +\infty, \\ \pi_i F_p^q &= 0 \qquad \text{sinon,} \end{aligned}$$

d'autre part $E^0 = B$.

Soit E^∞ la limite inductive des E^p. Si B est un CW-complexe, localement compact alors ΓE^∞ est faiblement homotope à ΓE et $H_*(\Gamma E^\infty; G)$ est isomorphe à $H_*(\Gamma E; G)$ [**16**].

On suppose que f admet une section s. Par composition, elle induit une section encore notée s: $B \to E^p$. Pour $p < q$, on note $F_p^q \to E_p^q \to B$ le fibré induit par s du fibré $F_p^q \to E^q \xrightarrow{f} E^p$ et on pose $E_p^\infty = E_p$.

Pour $p' \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, $F_p^q \to E_{p'}^q \xrightarrow{f} E_{p'}^p$ est un fibré, le fibré $F_{p'}^p \to E_{p'}^p \to B$ a une section notée s, la restriction, au-dessus de $\Gamma E_{p'}^p$, du fibré

$$\Gamma E_p^q \to \mathrm{Hom}(B, E_{p'}^q) \to (\mathrm{Hom}(B, E_{p'}^p), s)$$

donne un fibré

$$\Gamma E_p^q \to \Gamma E_{p'}^q \to \Gamma E_{p'}^p.$$

ΓE est ainsi muni d'une filtration décroissante: $\{s\} \subset \cdots \subset \Gamma E_{p+1} \subset \Gamma E_p \subset \cdots \subset \Gamma E$ ainsi que $H_*(\Gamma E; G)$, en posant pour $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$

$$\mathscr{F}^p H_n(\Gamma E; G) = \mathrm{Im}\big(H_n(\Gamma E_p; G) \to H_n(\Gamma E; G)\big).$$

THÉORÈME 1. *Soit un fibré* $F \to E \xrightarrow{f} B$ *vérifiant les conditions* ($\mathscr{C}$). *La suite spectrale qui commence par le bigradué* $E^1_{p,q} = H_{p+q}(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1};\ G)$ *si* $p + q \geqslant 0$, $p \geqslant 2$ *et* $q \geqslant -l$ *et* $E^1_{p,q} = 0$ *sinon, converge vers le bigradué associé à la filtration* $\mathscr{F}^* H_*(\Gamma E;\ G)$.

Cette suite spectrale sera appelée suite spectrale de Kahn des sections d'un fibré. Si B est réduit à un point on retrouve la suite spectrale de Kahn [**9**].

Le lemme suivant montre que cette filtration de $H_*(\Gamma E;\ G)$ est régulière [**2**].

LEMME 1. *Soit* $X \to C \xrightarrow{j} U$ *un fibré où* X *est* $(m-1)$-*connexe,* U *un espace* 1-*connexe de dimension cohomologique finie* l *avec* $l \leqslant m - 1$. *Alors* ΓC *est* $(m - 1 - l)$-*connexe.*

DÉMONSTRATION. Pour $* > 0$, $\pi_*\ \Gamma C$ est limite d'une suite spectrale [**3, 7**] dont le terme initial est $H^r(U;\ \pi_{-s}X)$ où $s < 0$ et $r + s \leqslant 0$ et 0 sinon. Pour $i > 0$, $\pi_i \Gamma C$ est donc nul si $i \leqslant m - 1 - l$.

Pour $i = 0$, la première obstruction à l'existence d'une homotopie entre deux sections de j est un élément de $H^m(U;\ \pi_m X)$. Ce groupe est nul si $m \geqslant l + 1$. Toutes les obstructions suivantes sont alors nulles d'où le résultat.

2° *Domaine stable, calcul des premiers termes.* Dans le cas particulier où $F \to E \to B$ est un fibré trivial, alors $H_*(\Gamma E;\ G)$ est égal à $H_*(\mathrm{Hom}(B, F);\ G)$ et est limite d'une suite spectrale [**10**]. Si de plus F est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane

$$F = \bigtimes_i K(\pi_i F, i),$$

cette suite spectrale dégénère et on retrouve un résultat évident:

$$H_*\Big(\mathrm{Hom}\Big(B,\ \bigtimes_i\ K(\pi_i F, i)\Big);\ G\Big)$$

est obtenu par des extensions à partir du bigradué

$$M_{p,q} = H_{p+q}\Big(\bigtimes_{i \geqslant p}\ \mathrm{Hom}(B, K(\pi_i F, i)),\ \bigtimes_{i \geqslant p+1}\ \mathrm{Hom}(B, K(\pi_i F, i));\ G\Big)$$

qui est, dans ce cas, le terme $E^1_{p,q}$ de la suite spectrale de [**10**].

Par un argument de connexité, on trouve que, pour $p + q \leqslant 2(p - l)$, $M_{p,q}$ est isomorphe au bigradué:

$$A_{p,q} = H_{p+q}\big(\mathrm{Hom}\big(B, K(\pi_p F, p)\big);\ G\big).$$

Ceci nous conduit à introduire un domaine qui sera dit "stable".

CONVENTION. On dira que le couple d'entier (p, q) est dans le domaine stable si $q \leqslant p - 2l$.

REMARQUE. On a

$$A_{p,q} = H_{p+q}\Big(\bigtimes_{i=p-l}^{p} K\big(H^{p-i}(B;\ \pi_p F), i\big);\ G\Big).$$

Considérons un fibré $F \to E \xrightarrow{f} B$ vérifiant les conditions ($\mathscr{C}$).

LEMME 2. *Pour tout couple d'entiers* (p, q), *on a*

$$A_{p,q} = H_{p+q}\left(\Gamma E_p^{p+1};\, G\right).$$

DÉMONSTRATION. La fibre F_p^{p+1} du fibré $F_p^{p+1} \to E_p^{p+1} \to B$ est un espace de type $K(\pi_p F, p)$.

Ce fibré est principal puisque sa base est 1-connexe et que sa fibre est un espace d'Eilenberg-Mac Lane. Comme il admet une section, il est trivial et E_p^{p+1} est isomorphe à $B \check{\times} K(\pi_p F, p)$, d'où on a ΓE_p^{p+1} isomorphe à $\mathrm{Hom}(B, K(\pi_p F, p))$.

La projection des fibrés $F_p^{p+1} \to E_p \xrightarrow{f} E_p^{p+1}$ définit, en utilisant le Lemme 2, un morphisme de bigradué, noté $H\Gamma f\colon E^1 \to A$.

THÉORÈME 2. *Dans le domaine stable*, $H\Gamma f\colon E^1 \to A$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. L'espace ΓE_p^{p+1} est $(p - 1 - l)$-connexe. D'après le Lemme 1, ΓE_{p+1} est $(p - l)$-connexe d'où pour $p \geqslant l + 1$ et $-l \leqslant q \leqslant p - 2l$, d'après le lemme [**15**, p. 469] (qui se prolonge au cas non orientable) le morphisme $H\Gamma f$ est un isomorphisme.

Pour $p = l$, un raisonnement classique d'obstruction montre que $E_{l,-l}^1$ est isomorphe à $A_{l,-l}$.

3° *Cas des sections pointées.* On munit l'espace des sections pointées de f d'une filtration induite par celle de ΓE. On a

$$\pi_i\left(\mathrm{Hom}\left(B, K\left(\pi_p F, p\right)\right)\right) = \pi_i\left(\mathrm{Hom}'\left(B, K\left(\pi_p F, p\right)\right)\right) \quad \text{si } i \neq p$$

et

$$\pi_p\left(\mathrm{Hom}\left(B, K\left(\pi_p F, p\right)\right)\right) = \pi_p(F).$$

THÉORÈME 3. *Les termes* $E_{p,q}^1$ *de la suite spectrale de Kahn des sections pointées d'un fibré, vérifiant les conditions* ($\mathscr{C}$), *s'écrivent dans le domaine stable*

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}\left(\bigtimes_{i=p-l}^{p-1} K\left(H^{p-i}(B;\, \pi_p F), i\right);\, G\right).$$

On a des résultats analogues pour la cohomologie de l'espace des sections d'un fibré vérifiant les conditions ($\mathscr{C}$).

III. Calcul de la différentielle dans le domaine stable. Remarquons que la différentielle $d^r\colon E_{p,q}^r \to E_{p+r,q-r-1}^r$ est de bidegré $(r, -r - 1)$.

1° *Invariant d'Eilenberg.* Le fibré principal $\varepsilon_p^{p+2}\colon F_{p+1}^{p+2} \to E_p^{p+2} \to E_p^{p+1}$ a une fibre de type $K(\pi_{p+1} F, p + 1)$. Il est donc classifié par une application

$$\rho\colon B \times K(\pi_p F, p) \to K(\pi_{p+1} F, p + 2).$$

La classe de ρ dans $H^{p+2}(B \times K(\pi_p F, p);\, \pi_{p+1} F)$ est *le pième invariant d'Eilenberg* du fibré ε_p^{p+2} [**17**]. Nous noterons encore ρ l'application de $B \times K(\pi_p F, p)$ dans $B \times K(\pi_{p+1} F, p + 2)$ définie par $(b, t) \to (b, \rho(b, t))$.

Soit le bigradué

$$\mathscr{B}_{p,q} = H_{p+q}\left(\mathrm{Hom}\left(B, K\left(\pi_{p+1} F, p + 2\right)\right);\, G\right)$$

et

$$H\Gamma\rho\colon A \to \mathscr{B}$$

le morphisme de bigradué qui se déduit de l'application ρ précédente. On appellera ce morphisme de bigradué "*invariant d'Eilenberg.*"

2° *Morphisme lié à la transgression*. Rappellons les définitions. Soit un fibré $\mathscr{L}$: $X \to C \xrightarrow{j} U$, avec C contractile. Soit

$$H_n(j)\colon H_n(C, X; G) \to H_n(U; G)$$

le morphisme déduit de la projection j du fibré $\mathscr{L}$ et

$$\delta_{\mathscr{L}}\colon H_n(C, X; G) \to H_{n-1}(X; G)$$

l'isomorphisme de connexion du couple (C, X). Le morphisme

$$\varphi = H_n(j) \circ \delta_{\mathscr{L}}^{-1}$$

détermine un isomorphisme inverse de l'isomorphisme de transgression τ du fibré:

$$\tau\colon \operatorname{Im}\varphi \to \operatorname{Coker}\varphi.$$

Prenons pour fibré $\mathscr{L}$, le fibré

$$\mathscr{L}\colon \operatorname{Hom}\big(B, K(\pi_{p+1}F, p+1)\big) \to \operatorname{Hom}(B, L) \xrightarrow{j} \operatorname{Hom}\big(B, K(\pi_{p+1}F, p+2)\big)$$

déduit du fibré universel

$$K(\pi_{p+1}F, p+1) \to L \to K(\pi_{p+1}F, p+2).$$

Le morphisme φ, défini ci-dessus, détermine un morphisme de bigradué, encore noté φ: $A \to \mathscr{B}$ de bidegré $(-1, +2)$. On l'appellera *morphisme lié à la transgression*.

3° *Calcul de la différentielle d^1.*

THÉORÈME 4. *La différentielle d^1 de la suite spectrale de Kahn des sections du fibré $F \to E \xrightarrow{f} B$, vérifiant les conditions $(\mathscr{C})$, est un morphisme de bigradué, de bidegré $(+1, -2)$, calculée, à partir de l'invariant d'Eilenberg $H\Gamma\rho$ et du morphisme φ lié à la transgression (voir plus haut), par la formule*

$$\varphi \circ H\Gamma f \circ d^1 = H\Gamma\rho \circ H\Gamma f,$$

où $H\Gamma f$: $E^1 \to A$ est le morphisme de bigradué déduit de la projection des fibrés.

DÉMONSTRATION. Pour calculer la différentielle d^1, on peut se restreindre au cas où la fibre n'a que deux groupes d'homotopie en utilisant une décomposition de Moore-Postnikov. En effet, on a le diagramme commutatif suivant, où $\bar{\rho}$ recouvre le $p$ième invariant d'Eilenberg ρ et $(\bar{g}, g)$ est le morphisme de fibré obtenu par décomposition de Moore-Postnikov.

$$\begin{array}{ccccc}
E_{p+1} & \underset{g}{\to} & E_{p+1}^{p+2} & \overset{=}{\to} & B \times K(\pi_{p+1}F, p+1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
E_p & \underset{\bar{g}}{\to} & E_p^{p+2} & \underset{\bar{\rho}}{\to} & B \times L \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
E_p^{p+1} & \overset{=}{\to} & E_p^{p+1} & \underset{\rho}{\to} & B \times K(\pi_{p+1}F, p+2)
\end{array}$$

Ce diagramme donne, en passant aux espaces de sections au-dessus de B, un diagramme commutatif dont les verticales sont encore des fibrés.

Par fonctorialité de l'homomorphisme bord du couple obtenu par inclusion de la fibre dans l'espace total, le composé $H\Gamma\bar{\rho} \circ H\Gamma\bar{g}$:

$$H_{p+q}(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1};\, G) \xrightarrow{H\Gamma\bar{g}} H_{p+q}\left(\Gamma E_p^{p+2}, \Gamma E_{p+1}^{p+2};\, G\right)$$
$$\xrightarrow{H\Gamma\bar{\rho}} H_{p+q}\left(\operatorname{Hom}(B, L), \operatorname{Hom}\left(B, K(\pi_{p+1}F, p+1)\right);\, G\right)$$

s'écrit

$$H\Gamma\bar{\rho} \circ H\Gamma\bar{g} = \delta_{\mathscr{L}}^{-1} \circ g_* \circ \delta, \tag{1}$$

où $\delta_{\mathscr{L}}$ est défini plus haut, δ est l'homomorphisme bord du couple $(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1})$ et

$$g_*\colon H_{p+q-1}(\Gamma E_{p+1};\, G) \to H_{p+q-1}\left(\Gamma E_{p+1}^{p+2};\, G\right)$$

est déduit de g.

A partir des projections des fibrés, par fonctorialité, on obtient:

$$H\Gamma\rho \circ H\Gamma f = H(j) \circ H\Gamma\bar{\rho} \circ H\Gamma\bar{g}. \tag{2}$$

La différentielle d^1 est définie par l'homomorphisme bord du triple $\Gamma E_{p+2} \subset \Gamma E_{p+1} \subset \Gamma E_p$. Les morphismes $H\Gamma f$ et g_* sont obtenus par décomposition de Moore-Postnikov. On a donc la formule:

$$H\Gamma f \circ d^1 = g_* \circ \delta. \tag{3}$$

Les formules (1), (2), (3) donnent le résultat.

Corollaire 1. *Dans le domaine stable, la transgression τ du fibré $\mathscr{L}$, transforme l'invariant d'Eilenberg en la différentielle d^1.*

Démonstration. Dans le domaine stable $H\Gamma f$ est un isomorphisme. Il en est de même pour

$$H(j)\colon H_{p+1}\left(\operatorname{Hom}(B, L), \operatorname{Hom}\left(B, K(\pi_{p+1}F, p+1)\right);\, G\right)$$
$$\to H_{p+q}\left(\operatorname{Hom}\left(B, K(\pi_{p+1}F, p+2)\right);\, G\right).$$

Le morphisme φ devient l'isomorphisme réciproque de la transgression τ du fibré $\mathscr{L}$ et le Théorème 4 donne la formule $d^1 = \tau \circ H\Gamma\rho$ où on a identifié les bigradués E^1 et A par $H\Gamma f$.

Corollaire 2. *Pour $q \leqslant p - 2l - 2$, on a*

$$E_{p,q}^2 = \frac{\operatorname{Ker}(\tau \circ H\Gamma\rho)}{\operatorname{Im}(\tau \circ H\Gamma\rho)}.$$

Démonstration. Pour $q \leqslant p - 2l - 3$, l'expression de $E_{p,q}^2$ se déduit du corollaire précédent.

Pour $q = p - 2l - 2$, d^1 a pour source $E_{p-1,p-2l}^1$. D'après le lemme [**15**, p. 469],

$$H\Gamma f\colon H_{2p-2l-1}(\Gamma E_{p-1}, \Gamma E_p;\, G) \to H_{2p-2l-1}\left(\operatorname{Hom}\left(B, K(\pi_{p-1}F, p-1)\right);\, G\right)$$

est surjectif. C'est-à-dire que, pour le calcul de $E^2_{p,p-2l-2}$, tout se passe comme si la source de d^1 était remplacée par $H_{2p-2l-1}(\mathrm{Hom}(B, K(\pi_{p-1}F, p-1)); G)$ d'où le résultat.

4° *Généralisation.* Supposons que toutes les différentielles d^i soient nulles pour $i < r$, alors $E^1_{p,q} = E^2_{p,q} = \cdots = E^r_{p,q}$ et

$$d^r\colon H_{p+q}\big(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+r}\big) \to H_{p+q-1}\big(\Gamma E_{p+r}, \Gamma E_{p+r+1}\big)$$

vérifie la formule $d^r \circ \psi = \delta^r$, où $\psi\colon H_{p+q}(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+r}) \to H_{p+q}(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1})$ est surjectif, et δ^r est l'homomorphisme de connexion du triple $\Gamma E_{p+r+1} \subset \Gamma E_{p+r} \subset \Gamma E_p$. On a

$$\varphi \circ H\Gamma f \circ \delta^r = H\Gamma\rho \circ H\Gamma f_r$$

où

- φ est le morphisme lié à la transgression du fibré:

$$\mathscr{L}\colon \mathrm{Hom}\big(B, K\big(\pi_{p+r}F, p+r\big)\big) \to L \to \mathrm{Hom}\big(B, K\big(\pi_{p+r}F, p+r+1\big)\big),$$

- $H\Gamma f_r$ est associé à la projection du fibré

$$E_{p+r} \to E_p \xrightarrow{f_r} E_p^{p+r},$$

- $H\Gamma f$ est, comme plus haut associé à la projection du fibré

$$E_{p+r+1} \to E_{p+r} \to E_{p+r}^{p+r+1},$$

- ρ est l'invariant d'Eilenberg, déduit de l'application classifiante du fibré

$$E_{p+r}^{p+r+1} \to E_p^{p+r+1} \to E_p^{p+r}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_n\big(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1}\big) \arrow[dr, "d^r"] & \\
H_n\big(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+r}\big) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\delta^r"] \arrow[d, "H\Gamma f_r"] & & H_{n-1}\big(\Gamma E_{p+r}, \Gamma E_{p+r+1}\big) \arrow[d, "H\Gamma f"] \\
H_n\big(\Gamma E_p^{p+r}\big) \arrow[dr, "H\Gamma\rho"'] & & H_{n-1}\big(\Gamma E_{p+r}^{p+r+1}\big) \arrow[dl, "\varphi"] \\
 & H_n\big(\mathrm{Hom}\big(B, K\big(\pi_{p+r}F, p+r+1\big)\big)\big) &
\end{tikzcd}$$

IV. Etude des opérations qui interviennent dans la différentielle d^1. On note $\pi = \pi_p F$, $\pi' = \pi_{p+1}F$ et $H^i(\pi, p, \pi') = H^i(K(\pi, p); \pi')$.

PROPOSITION 1. *Le pième invariant d'Eilenberg* $[\rho] \in H^{p+2}(B \times K(\pi, p); \pi')$ *du fibré*

$$\varepsilon_p^{p+2}\colon B \times K\big(\pi', p+1\big) \to E_p^{p+2} \to B \times K(\pi, p)$$

s'écrit comme une somme $[\rho] = [\rho^0] + [\rho^2]$, *où* $[\rho^0] \in H^{p+2}(\pi, p, \pi')$ *est l'invariant d'Eilenberg de la fibre F et* $[\rho^2] \in H^2(B; \mathrm{Hom}(\pi, \pi'))$ *est lié à la structure du fibré.*

DÉMONSTRATION. La décomposition en somme de la cohomologie d'un produit donne:

$$H^{p+2}(B \times K(\pi, p);\ \pi') = H^0(B;\ H^{p+2}(\pi, p, \pi')) \oplus H^I(B;\ \operatorname{Ext}(\pi, \pi'))$$
$$\oplus H^2(B;\ \operatorname{Hom}(\pi, \pi')) \oplus H^{p+2}(B;\ \pi').$$

Comme B est 1-connexe, on a $H^1(B;\ \operatorname{Ext}(\pi, \pi')) = 0$. La restriction de $\rho \in [\rho]$ à $B \times \{0\}$ induit la projection

$$H^{p+2}(B \times K(\pi, p);\ \pi') \to H^{p+2}(B;\ \pi').$$

Cette projection envoie $[\rho]$ sur la classe d'une application classifiante de la restriction du fibré ε_p^{p+2} au-dessus de B. Cette restriction est le fibré trivial $F_{p+1}^{p+2} \to E_{p+1}^{p+2} \to B$, donc l'image de $[\rho]$ par cette projection est nulle.

Précisons comment opère chacune de ces classes. Pour cela, rappellons que le cup-produit sur les cocycles

$$Z^p(\Delta_q, \pi) \otimes Z^2(\Delta_q, \operatorname{Hom}(\pi, \pi')) \to Z^{p+2}(\Delta_q, \pi'),$$

défini à partir de l'évaluation $\pi \otimes \operatorname{Hom}(\pi, \pi') \to \pi'$, détermine une application simpliciale, notée

$$K(\pi, p) \times K(\operatorname{Hom}(\pi, \pi'), 2) \xrightarrow{\cup} K(\pi', p+2).$$

On déduit de la proposition précédente que le morphisme $\Gamma\rho$: $\operatorname{Hom}(B, K(\pi, p)) \to \operatorname{Hom}(B, K(\pi', p+2))$ s'écrit

$$\Gamma\rho(s) = \rho^0 \cdot s + \rho^2 \cup s,$$

où $\rho^0 \in [\rho^0]$, $\rho^2 \in [\rho^2]$, et $\rho^0 \cdot s$: $b \to \rho^0(s(b))$ et $\rho^2 \cup s$: $b \to \rho^2(b) \cup s(b)$.

Application. Si, par exemple, G a une structure de corps, alors l'invariant d'Eilenberg

$$H\Gamma\rho\colon H_*(\operatorname{Hom}(B, K(\pi, p));\ G) \to H_*(\operatorname{Hom}(B, K(\pi', p+2));\ G)$$

s'écrit

$$H\Gamma\rho(x) = \mu(H_*(\rho^0 \cdot s),\ H_*(\rho^2 \cup s))$$

où $s \in x$ et μ le produit de Pontryagin [**1**] de $H_*(\operatorname{Hom}(B, K(\pi', p+2));\ G)$.

REMARQUE. *Interprétation des classes* $[\rho^0]$ *et* $[\rho^2]$.

$[\rho^0]$ est l'invariant d'Eilenberg lié à la fibré F.

$[\rho^2]$ est lié au fibré principal associé au fibré $F \to E \to B$. En effet si celui-ci est un fibré trivial, alors ΓE est égal à $\operatorname{Hom}(B, F)$ et on retrouve [**10**] que d^1 s'exprime en fonction de $H\Gamma\rho^0$. Si le fibré n'est plus trivial mais que F est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, alors ρ^0 est nul et d^1 s'exprime en fonction de $H\Gamma\rho^2$.

V. Exemples.

A. *La fibre est une sphère homologique.* Soit (Y, y_0) un CW-complexe pointé, $(n-1)$-connexe. Soit un fibré, $W \to V \to B$, localement trivial, de base B connexe par arcs, 1-connexe, localement compact, de dimension cohomologique l, de fibre W de dimension cohomologique m.

L'espace $\operatorname{Hom}(V, Y)$ est isomorphe à l'espace des sections au-dessus de B d'un fibré

$$\operatorname{Hom}(W, Y) \to \mathscr{H} \to B$$

qui admet, naturellement, une section et qui vérifie les conditions ($\mathscr{C}$) si $n > m + 2$.

En appliquant le Théorème 1, on trouve:

PROPOSITION 2. *$H_*(\operatorname{Hom}(V, Y); G)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial, dans le domaine stable, est*

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\Big(\operatorname{Hom}\Big(B, K\big(\pi_p(\operatorname{Hom}(W, Y), p)\big)\Big); G\Big)$$

et $E^1_{p,q} = 0$ si $p \leqslant n - 1 - m$ et $q < -l$.

Applications. 1° Si Y est un espace d'Eilenberg-Mac Lane, $Y = K(R, n)$, alors $H_*(\operatorname{Hom}(V, K(R, n)); G)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont les termes E^1, dans le domaine stable, sont

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(\operatorname{Hom}(B, K(H^{n-p}(W; R), p)); G).$$

Remarquons qu'alors la fibre $\operatorname{Hom}(W, Y)$ a une structure de groupe abélien. Ces invariants d'Eilenberg sont nuls [**14**] et la différentielle d^1 s'exprime en fonction des invariants d'Eilenberg $H\Gamma\rho^2$ (voir §IV) liés à la structure principale du fibré $\operatorname{Hom}(W, Y) \to \mathscr{H} \to B$.

Si de plus la fibre W est une m-sphère homologique, il n'y a, dans le domaine stable, que deux colonnes non nulles. La seule différentielle non nulle est

$$d^m\colon E^1_{n-m,q} \to E^1_{n,q-m-1}.$$

PROPOSITION 3. *Suite exacte de Gysin.*

$W \to V \to B$ étant un fibré de fibre une m-sphère homologique, vérifiant les conditions ($\mathscr{C}$), on a

1° Pour $q < m - l$,

$$H_{n-m+q}(\operatorname{Hom}(V, K(R, n)); G) = H_{n-m+q}(\operatorname{Hom}(B, K(R, n - m)); G).$$

2° *Pour $m - l \leqslant q \leqslant n - m - 2l - 1$,*

$$\cdots H_{n-m+q+1}(\operatorname{Hom}(B, K(R, n - m)); G) \xrightarrow{d^m} H_{n-m+q}(\operatorname{Hom}(B, K(R, n)); G)$$
$$\to H_{n-m+q}(\operatorname{Hom}(V, K(R, n)); G) \to H_{n-m+q}(\operatorname{Hom}(B, K(R, n - m)); G)$$
$$\to \cdots \to H_{n-l}(\operatorname{Hom}(B, K(R, n - m)); G) \to 0.$$

Supposons que le fibré $W \to V \to B$ soit localement trivial, de groupe structural opérant sur W avec un point fixe. Ce fibré admet une section nous permettant d'identifier B à un sous-espace de V. Alors $\operatorname{Hom}((V, B), (Y, y_0))$ est isomorphe à l'espace des sections au-dessus de B d'un fibré $\operatorname{Hom}(W, Y) \to \mathscr{H} \to B$.

Supposons que W soit une m-sphère homologique, avec $n > m + 2$, alors ce fibré vérifie les conditions ($\mathscr{C}$). On a donc le résultat: $H_*(\mathrm{Hom}((V, B), (Y, y_0)); G)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale qui, dans le domaine stable, commence par

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\big(\mathrm{Hom}\big(B, K(\pi_{p-m}Y, p)\big); G\big).$$

On peut appliquer ce résultat, par exemple pour V espace total d'un fibré en sphère S^n de groupe structural $O(n)$.

B. *La base est une sphère homologique.*

PROPOSITION 4. *Soit $F \to E \to S^n$ un fibré vérifiant les conditions ($\mathscr{C}$) dont la base est la sphère S^n et la fibré un produit (peut-être infini) d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Alors pour $r < n - 1$, les fibrés*

$$\varepsilon_p^{p+r+1}\colon S^n \times K\big(\pi_{p+r}F, p+r\big) \to E_p^{p+r+1} \to E_p^{p+r}$$

sont triviaux.

DÉMONSTRATION. (a) Pour $n = 2$ alors $r = 0$ et

$$\varepsilon_p^{p+1}\colon S^n \times K\big(\pi_p F, p\big) \to E_p^{p+1} \to E_p^p$$

est un fibré trivial.

(b) Supposons $n > 2$, montrons le pour ε_p^{p+2}. On a vu, Proposition 2, §IV, que le classifiant ρ de ε_p^{p+2} s'écrit $[\rho] = [\rho^0] + [\rho^2]$, où

$$[\rho^0] \in H^{p+2}\big(K(\pi_p F, p); \pi_{p+1}F\big)$$

et

$$[\rho^2] \in H^2\big(S^n; \mathrm{Hom}(\pi_p F, \pi_{p+1}F)\big).$$

F étant un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, on a $[\rho^0] = 0$ et comme $n \neq 2$, on a $H^2(S^n; \mathrm{Hom}(\pi_p F, \pi_{p+1}F)) = 0$. On a donc

$$E_p^{p+2} = S^n \times K\big(\pi_p F, p\big) \times K\big(\pi_{p+1}F, p+1\big).$$

(c) Supposons que tous les fibrés ε_p^{p+i+1} sont triviaux pour $i < r < n - 1$, c'est-à-dire que

$$E_p^{p+i+1} = S^n \times K\big(\pi_p F, p\big) \times \cdots \times K\big(\pi_{p+i}F, p+i\big),$$

alors ε_p^{p+r+1} est trivial.

En effet, ce fibré est classifié par

$$[\rho] \in H^{p+r+1}\big(S^n \times K(\pi_p F, p) \times \cdots \times K(\pi_{p+r-1}F, p+r-1); \pi_{p+r}F\big).$$

Or pour $r < n - 1$, cet espace est égal à

$$H^{p+r+1}\big(K(\pi_p F, p) \times \cdots \times K(\pi_{p+r-1}F, p+r-1); \pi_{p+r}F\big).$$

La restriction de $[\rho]$ est nulle puisque F est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

REMARQUE. On peut obtenir le même résultat sans supposer que F est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, en utilisant les propriétés des équivalences d'homotopie de F [6].

Soit $(k-1)$ la connexité de F, d'après la proposition précédente, le fibré ε_k^{k+n-1} est trivial.

Pour $m \leqslant k-2$, un argument de connexité montre alors que

$$H_m(\Gamma' E) = H_m\left(\Gamma' E_k^{k+n-1}\right) = H_m\left(\Omega^n F_k^{k+n-1}\right) = H_m(\Omega^n F).$$

PROPOSITION 5. *Soit un fibré $F \to E \to S^n$ vérifiant les conditions $(\mathscr{C})$ dont la fibré est un produit peut-être infini d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, alors pour $r < n-1$, les différentielles*

$$d^r\colon E^r_{p,q} \to E^r_{p+r,q-r-1}$$

dont le but est dans le domaine stable sont nulles.

DÉMONSTRATION. Ce résultat est vrai pour $d^1\colon E^1_{p,q} \to E^1_{p+1,q-2}$. En effet, d'après le Théorème 4, §III, 3° la différentielle d^1 vérifie:

$$\varphi \circ H\Gamma f \circ d^1 = H\Gamma\rho \circ H\Gamma f$$

$$\begin{tikzcd}
H_{p+q}(\Gamma E_p, \Gamma E_{p+1}) \arrow[rr, "d^1"] \arrow[d, "H\Gamma f"'] & & H_{p+q-1}(\Gamma E_{p+1}, \Gamma E_{p+2}) \arrow[d, "H\Gamma f"] \\
H_{p+q}\left(\Gamma E_p^{p+1}\right) \arrow[dr, "H\Gamma\rho"'] & & H_{p+q-1}\left(\Gamma E_{p+1}^{p+2}\right) \arrow[dl, "\varphi"] \\
& H_{p+q}\left(\mathrm{Hom}\left(S^n, K\left(\pi_{p+1}F, p+2\right)\right)\right). &
\end{tikzcd}$$

Si le but de d^1 est dans le domaine stable, alors φ et $H\Gamma f$ sont des isomorphismes. La nullité de ρ implique celle de d^1.

En utilisant le résultat du §III, 4°, on le démontre par récurrence pour tout d^r avec $r < n-1$.

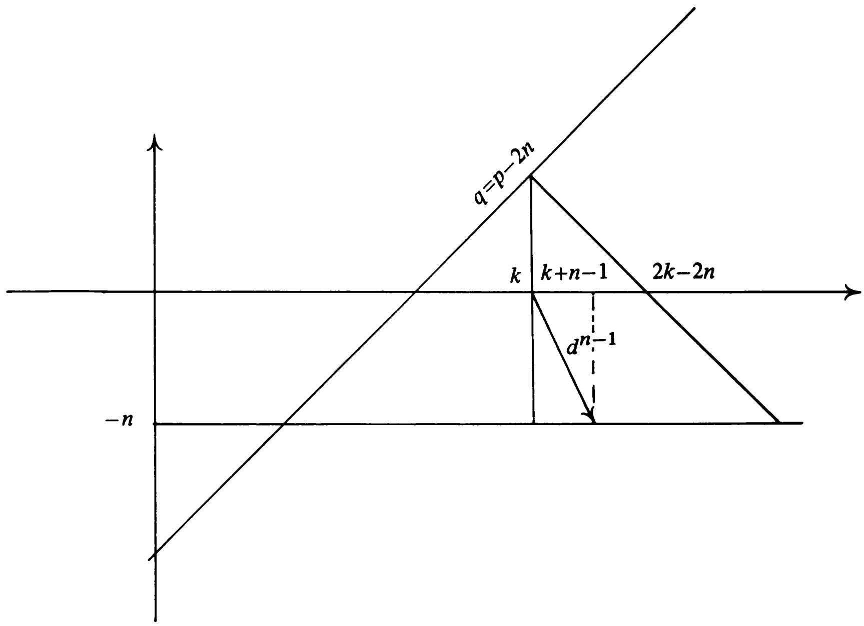
Notons $E^r_{p,q}(\Gamma' E)$ et $E^r_{p,q}(\Omega^n F)$ les termes des suites spectrales associées respectivement à $H_*(\Gamma' E)$ et $H_*(\mathrm{Hom}'(S^n, F))$. On a pour $q \leqslant p - 2n$

$$E^1_{p,q}(\Gamma' E) = E^2_{p,q}(\Gamma' E) = \cdots = E^{n-1}_{p,q}(\Gamma' E) = E^{n-1}_{p,q}(\Omega^n F) = \cdots = E^1_{p,q}(\Omega^n F).$$

En imposant des conditions aux groupes d'homotopie de F, on peut obtenir, pour $m \leqslant 2k - 2n$

$$H_m(\Gamma' E) = H_m(\Omega^n F).$$

Pour $m = 2k - 2n + 1$, apparaît un terme $E^1_{k,k-2n+1}$ dans le domaine non stable.

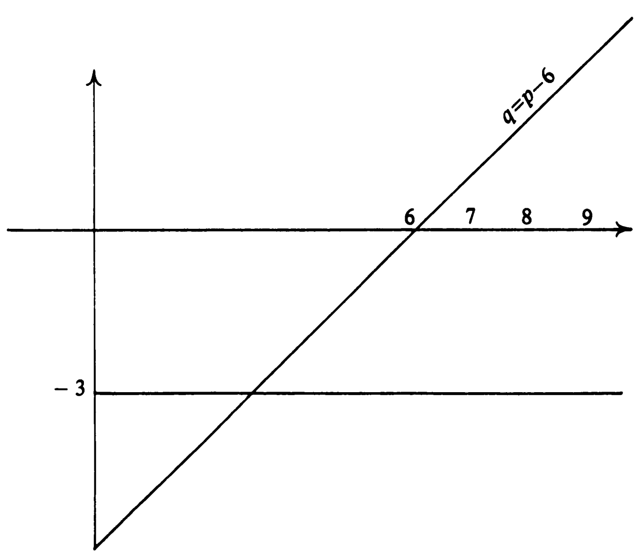


En effet si $\mathrm{Hom}(\pi_k F, \pi_{k+n-1} F)$ est nul, alors la différentielle d^{n-1}: $E^1_{k,0} \to E^1_{k+n-1,-n}$ est nulle, pourvu que $k \geqslant 2n$. Alors on a

$$H_{k-1}(\Gamma' E) = H_{k-1}(\Omega^n F).$$

L'obstruction suivante est dans $\mathrm{Ext}(\pi_k F, \pi_{k+n} F) \oplus \mathrm{Hom}(\pi_{k+1} F, \pi_{k+n} F)$. Si on suppose par exemple que $\pi_{k+n} F = 0$, on obtient $H_k(\Gamma' E) = H_k(\Omega^n F) \ldots$.

Exemple. Soit un fibré $F \to E \to S^3$ vérifiant les conditions $(\mathscr{C})$ avec F 5-connexe.



TABLE

	$E^1_{p,q}$	6	7	8	9
1	1°	$H_7(K(H^2(B;\pi_6),4)) \oplus H_2(B;\pi_6) \oplus H_3(B;\pi_6) \oplus H_7(K(H^3(B;\pi_6),3))$			
	2°	$H_2(B;\pi_6) \oplus (H_3(B;\pi_6))$			
	3°	π_6			
	4°	$H_7(K(\pi_6,3))$			
0	1°	$H_6(K(H^2(B;\pi_6),4)) \oplus H_6(K(H^3(B;\pi_6),3))$	$H_7(K(H^2(B;\pi_7),5)) \oplus H_7(K(H^3(B;\pi_7),4))$		
	2°	0	0		
	3°	0	0		
	4°	$H_6(K(\pi_6,3))$	$H_7(K(\pi_7,4))$		
-1	1°	$H_5(K(H^3(B;\pi_6),3))$	$H_6(K(H^3(B;\pi_7),4))$	$H_7(K(H^3(B;\pi_8),5))$	
	2°	0	0	0	
	3°	0	0	0	
	4°	$H_5(K(\pi_6,3))$	$H_6(K(\pi_7,4))$	$H_7(K(\pi_8,5))$	
-2	1°	$H^2(B;\pi_6)$	$H^2(B;\pi_7)$	$H^2(B;\pi_8)$	
	2°	$H^2(B;\pi_6)$	$H^2(B;\pi_7)$	$H^2(B;\pi_8)$	
	3°	0	0	0	
	4°	0	0	0	
-3	1°	$H^3(B;\pi_6)$	$H^3(B;\pi_7)$	$H^3(B;\pi_8)$	$H^3(B;\pi_9)$
	2°	$H^3(B;\pi_6)$	$H^3(B;\pi_7)$	$H^3(B;\pi_8)$	$H^3(B;\pi_9)$
	3°	π_6	π_7	π_8	π_9
	4°	π_6	π_7	π_8	π_9

Dans chaque case du tableau précédent, on a calculé

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\big(\mathrm{Hom}\big(B, K(\pi_p F, p)\big)\big)$$

avec $p = 6, 7, 8, 9$ et $q = 1, 0, -1, -2, -3$,

1° homologie à coefficients quelconques;

2° homologie à coefficients rationnels, $\pi_i F$ signifiant alors homotopie rationnelle de F;

3° même cas que 2° avec de plus $B = S^3$;

4° homologie à coefficients quelconques et $B = S^3$. On obtient:

1° Dans tous les cas

$$H_3(\Gamma' E) = H^3(B;\, \pi_6 F) = H_3\big(\mathrm{Hom}'(B, F)\big),$$

ce que l'on savait déjà en utilisant le théorème d'Hurewicz.

On a la suite exacte classique donnée par le "coin" d'une suite spectrale:

$$H_5(\Gamma' E) \to H_5\big(K\big(H^3(B;\, \pi_6 F), 3\big)\big) \xrightarrow{d^1} H^3(B;\, \pi_7 F)$$

$$\to H_4(\Gamma' E) \to H^2(B;\, \pi_6 F) \to 0.$$

2° Dans le cas rationnel, $E^1_{6,-1}$ est nul, $E^\infty_{8,-3} = E^1_{8,-3} = H^3(B;\ \pi_8 F)$ et $E^\infty_{7,-2} = E^1_{7,-2} = H^2(B;\ \pi_7 F)$. Donc on a

$$H_4(\Gamma' E) = H^2(B;\ \pi_6 F) \oplus H^3(B;\ \pi_7 F),$$
$$H_5(\Gamma' E) = H^2(B;\ \pi_7 F) \oplus H^3(B;\ \pi_8 F),$$

et les suites exactes, en utilisant le Corollaire 2, §III, 3°

$$H_2(B;\ \pi_6 F) \oplus H_3(B;\ \pi_6 F) \xrightarrow{d^3} H^3(B;\ \pi_9 F) \to H_6(\Gamma' E) \to E^\infty_{8,-2} \to 0,$$

avec

$$H_2(B;\ \pi_6 F) \oplus H_3(B;\ \pi_6 F) \to H^2(B;\ \pi_8 F) \to E^\infty_{8,-2} \to 0.$$

3° Si de plus $B = S^3$, on obtient

$$H_4(\Gamma' E) = \pi_7 F, \quad H_5(\Gamma' E) = \pi_8 F, \quad H_6(\Gamma' E) = \pi_9 F.$$

4° Si l'homologie est à coefficients quelconques, avec $B = S^3$ et F du type $K(\pi_6 F, 6) \times K(\pi_7 F, 7) \times K(\pi_8 F, 8) \times F_9$, alors d^1 est nulle, ce qui donne

$$H_4(\Gamma' E) = \pi_7 F = H_4(\Omega^3 F),$$

et on a la suite exacte (*):

$$H_6(\Gamma' E) \to H_6(K(\pi_6 F, 3)) \xrightarrow{d^2} \pi_8 F \to H_5(\Gamma' E) \to H_5(K(\pi_6 F, 3)) \to 0.$$

Si $\mathrm{Hom}(\pi_6 F, \pi_8 F)$ est nul, alors d^2 est nulle et $H_5(\Gamma' E) = H_5(\Omega^3 F)$, et on a la suite exacte:

$$0 \to \pi_8 F \to H_5(\Gamma' E) \to H_5(K(\pi_6 F, 3)) \to 0.$$

Si seulement $\pi_9 F$ est nul, on rajoute à la suite exacte (*)

$$0 \to H_6(K(\pi_7 F, 4)) \to H_6(\Gamma' E).$$

Si $\pi_9 F$ est nul et $\mathrm{Hom}(\pi_6 F, \pi_8 F)$ est nul, alors on a la suite exacte

$$0 \to H_6(K(\pi_7 F, 4)) \to H_6(\Gamma' E) \to H_6(K(\pi_6 F, 3)) \to 0.$$

On peut aussi obtenir des résultats sur certains invariants d'Eilenberg. Par exemple, dans le contexte précédent, si on sait que $H_4(\Gamma' E) = H^2(B;\ \pi_6 F)$, cela signifie que $E^\infty_{7,-3}$ est nul, d'où

$$E^1_{6,-1} = H_5(K(H^3(B;\ \pi_6 F), 3)) \neq 0$$

et

$$d^1\colon E^1_{6,-1} \to E^1_{7,-3}, \qquad d_1 \neq 0,$$

ce qui implique (notations §IV), $[\rho^0]$ ou $[\rho^2] \neq 0$.

Bibliographie

1. A. Borel, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Lecture Notes in Math., vol. 36, Springer-Verlag, 1967.

2. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1956.

3. H. Cartan and W. Shih, *Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique*, Séminaire E. N. S. H. Cartan 1962/1963.

4. F. R. Cohen and L. R. Taylor, *The homology of function spaces*, Contemp. Math., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1983.

5. A. Didierjean and A. Legrand, *Suites spectrales de Serre et homotopie*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **34** (1984), 227–242.

6. G. Didierjean, *Homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie fibrés*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985).

7. H. Federer, *A study of function spaces by spectral sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956).

8. A. Haefliger, *Rational homotopy of the space of sections of a nilpotent bundle*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982).

9. D. W. Kahn, *Spectral sequence of a Postnikov system*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 168–198.

10. C. Legrand, *Sur l'homologie des espaces fonctionnels*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983).

11. S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin; Academic Press, New York, 1963.

12. J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Math. Studies, no. 11, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1967.

13. J. Moore, *On a theorem of Borsuk*, Fund. Math. **43** (1956), 195–201.

14. ______, Séminaire Cartan 1954/1955, exposé 18–19.

15. J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. **54** (1951), 425–505.

16. E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

17. R. Thom, *L'homologie des espaces fonctionnels*, Colloque de Topologie Algébrique, Louvain, 1956.

MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118, ROUTE DE NARBONNE, 31062 TOULOUSE, CEDEX FRANCE